48. a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir n bolas idénticas en urnas de manera que r urnas prefijadas estén vacías?

b) ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir n bolas idénticas en k urnas de manera que una urna prefijada contenga r bolas (r£n)?

Resoluciòn:

a) Habrá tantas configuraciones como maneras distintas de repartir todas las bolas en k-r urnas. Por lo tanto habrá

$$\begin{pmatrix} n+k-r-1 \\ k-r-1 \end{pmatrix}$$

b) Para construir estas configuraciones tomamos r bolas y las colocamos en la urna prefijada. Luego, las restantes n-r bolas se repartirán, de todas las maneras posibles, entre las n-1 urnas que quedan. Por lo tanto, habrá

$$\begin{pmatrix} n+k-r-2 \\ k-2 \end{pmatrix}$$

49. Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones (Andalucía 98):

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

Resolución:

Aplicando el método de Gauss, vamos a triangularizar superiormente la matriz de coeficientes ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & 1 \\ a & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \approx \left\{F_2' = F_2 - F_1 \,//\, F_3' = F_3 - aF_1\right\} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & & 1-a \end{pmatrix} \approx \left\{F_3' = F_3 + F_2\right\} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-{}^{2} & & 1-a \end{pmatrix}$$

Los valores conflictivos del sistema son:

a-1=0 $\rightarrow$ $\boxed{a=1}$

$$2-a-a^2=0 \rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}\rightarrow 1\\ \rightarrow -2 \rightarrow a=-2\end{cases}$$

<u>Caso 1</u>: $\boxed{a=1}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \,|\, & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l} Rg(A)=1\\ Rg(A|B)=1\\ n^{o}\,de\ incógnitas=3\end{array}\right\} S.C.I.\ (2\ parámetros).$$

x+y+z=1 $\rightarrow$ z=1-x-y

x,y$\in$ R

<u>Caso 2</u>: $\boxed{a=-2}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 \,|\, & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l} Rg(A)=2\\ Rg(A|B)=3\end{array}\right\} Sistema\ Incompatible.$$

<u>Caso 3</u>: $\boxed{a\neq 1 \text{ y } a\neq z}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a \quad | & 0\\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1-a\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l} Rg(A)=3\\ Rg(A|B)=3\\ n^{o}\,de\ incógnitas=3\end{array}\right\} S.C.D.$$

$$\begin{cases} x+y+az=1\\ (a-1)y+(1-a)z=0 \rightarrow y-z=0 \rightarrow y=z \rightarrow y=\dfrac{1}{a+2}\\ (1-a)(a+2)z=(1-a) \rightarrow z=\dfrac{1}{a+2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ x+y+az=1 $\rightarrow$ x+ $\dfrac{1}{a+2}+a\dfrac{1}{a+2}=1 \rightarrow x=1-\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}$

$\rightarrow$ x= $\dfrac{a+2-1-a}{a+2} \rightarrow x=\dfrac{1}{a+2}$

50. Calcular el valor del determinante:

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1... & 1\\ 1 & 1+x & 1... & 1\\ 1 & 1 & 1+x... & 1\\ ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}=\{F_1'=F_1+...+F_n\}=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1... & 1\\ 1+x & 1+x & 1... & 1\\ 1+x & 1 & 1+x... & 1\\ ... & ... & ... & ...\\ 1+x & 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}=$$

$$(1+x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1... & 1\\ 1 & 1+x & 1... & 1\\ 1 & 1 & 1+x... & 1\\ ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}=\{F_i'=F_i-F_1, i>1\}=(1+x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1... & 1\\ 0 & x & 0... & 0\\ 0 & 0 & x... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=(1+x)\cdot x^{n-1}$$

$\Rightarrow$ D=(1+x)·x^{n-1}

51. Sea G el grupo cíclico infinito generado por x. Sea Y={y=$x^{12a+30b+42c}$; a,b,c Î Z}. Llamemos H al subgrupo cíclico de G generado por x^6. Probar que H=Y.

Resolución:

($\supseteq$) Es fácil ver que como $\forall$y$\in$ Y y=$x^{12a+30b+42c}$=$(x^6)^{2a+5b+7c}$ $\Rightarrow$ y$\in$H

Por lo tanto, se tiene que Y$\subseteq$H.

($\subseteq$) Como el m.c.d.(2,5)=1, es decir, 2 y 5 son pirmos entre sí entonces aplicando la identidad de Beront tenemos que existen u y v$\in$ Z tales que 1=2u+5v, por lo tanto:

$\forall$n$\in$ Z tenemos que n=2nu+5nv y en concreto 6n=12nu+30nv+42·0 $\Rightarrow$ $x^{6n}$$\in$Y, entonces H$\subseteq$Y. Entonces H=Y.

52. Sea G un grupo. Probar que la aplicación f_a: G® G difinida por:

x® f_a(x) = axa^{-1} " x Î G y a Î G es un automorfismo.

Sea F el conjunto de todos los automorfismos anteriores. Estudiar la estructura que confiere a dicho conjunto la ley de composición de aplicaciones.

Resolución:

A) 1) Como $\forall x,y\in G$, $f_a(sy) = a(xy)a^{-1} = a(xa^{-1}ay)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f_a(x)\cdot f_a(y) \Rightarrow$ f_a es un homomorfismo.

2) $\forall x\in G$ $(f_{a-1}\circ f_a)(x) = f_{a-1}(axa^{-1}) = a^{-1}axa^{-1}a = x$

$(f_a\circ f_{a-1})(x) = f_a(f_{a-1}(x)) = f_a(a^{-1}xa) = aa^{-1}xaa^{1} = x$

$\Rightarrow f_a$ tiene inverso

$\Rightarrow f_a$ es un automorfismo

b) 1) $f_b f_a(x) = f_b(axa^{-1}) = baxa^{-1}b^{-1} = bax(ba)^{-1} = f_{ba}(x)$ $\forall x\in G \Rightarrow f_b\circ f_a = f_{ba}$

2) Como la composición de aplicaciones ya es asociativa, en este caso también lo es.

3) Si $e\in G$ es el elemento neutro de G $\Rightarrow f_e$ es el elemento neutro de $(F,\circ)$, pues $\forall f_a\in F \Rightarrow f_e\circ f_a = f_{ea} = f_a$ y $f_a\circ f_e=f_{ae} = f_a$.

4) Por lo visto anteriormente f_a tiene anteriormente inverso, que es f_{a-1}.
$\Rightarrow (F,\circ)$ es un grupo.

53. Sea Q[x] el conjunto de los polinomios de una indeterminada con coeficientes racionales. Demostrar:

a) Siendo x^m-1, x^n-1, dos polinomios de Q[x] tales que: m.c.d.(m,n) = d, se verifica m.c.d.(x^m-1, x^n-1) = x^d-1.

b) Que no existe ningún polinomio p de Q[x] tal que p¹ 0, p¹ 1 y que la función polinómica p(x) cumpla p(x+y)=p(x)p(y) " x,y Î Q.

<u>Resolución:</u>

a) Las raíces en los complejos de x^m-1 y x^n-1 son las raíces m-ésimas y n-ésimas de la unidad.

Los ceros o raíces comunes de x^m-1 y x^n-1 son los ceros del m.c.d.(x^m-1, x^n-1), es decir, las raíces d-ésimas de la unidad donde d=m.c.d.(m,n), esto viene basado en e teorema de Beront con d=am+bn y r^m=1 y r^n=1 $\Rightarrow r^d=r^{am+bn}=1 \Rightarrow$ m.c.d.(x^m-1, x^n-1) = = x^d-1.

b) Si tomamos x=y $\Rightarrow$ p(zx) = $(p(x))^2$ $\forall x \in Q$.

Si p(x) es de grado d $\Rightarrow$ p(2x) es de grado d $(p(x))^2$ de grado 2d $\Rightarrow$ d=2d $\Rightarrow$ d=0.

Como d=0 $\Rightarrow$p(x)=c $\Rightarrow$ p(x+y) = d = p(x)p(y) = d^2 $\Rightarrow$ d=d^2 $\Rightarrow$ d(d-1) = 0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow p=0 \ o \ p=1.$$

54. Sea U=(u_{ij}) la matriz cuadrada de orden n donde u_{ij}=1 para todo (i,j). Sea F={A Î $R^{n,n}$, AU=UA= a (A)U, a (A) Î R}. Pruébese:

1) F es un subespacio de $R^{n,n}$.

2) Si A Î F y existe A^{-1}, entonces A^{-1} Î F y a (A)¹ 0. Relacionar a (A) y a (A^{-1}).

3) Si A, B Î F, entonces AB Î F. Calcular a (AB).

4) A Î F Û $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha(A) \ \ \forall (i,j)$

5) La aplicación A® a (A) es una forma lineal.

<u>Resolución:</u>

1) F$\neq$0 pues la matriz nula está en F.

Si tomamos A,B$\in$F y $\alpha,\beta \in$R, entonces:

$(\alpha A+\beta B)U = \alpha AU+\beta BU = \alpha UA+\beta UB = U(\alpha A+\beta B)$

$(\alpha A+\beta B)U = \alpha\alpha(A)U+\beta\alpha(B)U = (\alpha\alpha(A)+\beta\,\alpha(B))U$

$\Rightarrow$ $\forall$A,B$\in$F y $\alpha,\beta\in$R $\Rightarrow$ $\alpha A+\beta B \in F$ con $\alpha(\alpha A+\beta B) = \alpha\alpha(A)+\beta\,\alpha(B)$. Entonces F es un subespacio vectorial de $R^{n,n}$.

2) Sea A$\in$F y sea A^{-1}, que existe.

AU = UA = α(A)U $\Rightarrow$ U = A^{-1}UA = $\alpha(A)A^{-1}U$ $\Rightarrow$ $\alpha(A)\neq 0$ puesto que si $\alpha(A)=0$ $\Rightarrow$ U sería nula.

Entonces $U = \frac{1}{\alpha(A)} AU = \frac{1}{\alpha(A)} UA$.

AU = UA $\Rightarrow$ $A^{-1}AUA^{-1} = A^{-1}UAA^{-1}$ $\Rightarrow$ $UA^{-1} = A^{-1}U$

$\Rightarrow UA^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha(A)} UA\right) A^{-1} = \frac{1}{\alpha(A)} U$

$\Rightarrow A^{-1}U = UA^{-1} = \frac{1}{\alpha(A)} U$ y $\alpha(A^{-1}) = \frac{1}{\alpha(A)}$

3) AU = UA = α(A)U

$$\left.\begin{array}{l} AU = UA = \alpha(A)U \\ BU = UB = \alpha(B)U \end{array}\right\} \Rightarrow ABU = AUB = \alpha(B)AU \Rightarrow \text{ABU = UAB = } \alpha\text{(B)}\alpha\text{(A)U}$$

⇒ A,B∈F y α(AB)= α(A)α(B)

4) AU = α(A)U ⇔ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \alpha(A) \quad i, j \in \{1,\ldots,n\}$

5) Sea f: F→R aplicación: f(λA+μB) = α(λA+μB) = λα(A)+ μα(B) ⇒ f es una forma lineal.