Sistemas de ecuaciones lineales. Motivación

En esta breve exposición sobre la utilidad y el alcance de los sistemas de ecuaciones lineales, se pretende que pueda servir como motivación para los estudiantes en dos aspectos:

– Como primer objetivo, se persigue que lleguen a ser conscientes de que los sistemas de ecuaciones lineales resuelven problemas reales en diferentes campos: matemáticas, industria, comercio…

– Y, como segundo objetivo, se pretende que los alumnos conozcan el hecho de que lo que existe sobre sistemas de ecuaciones lineales es mucho más extenso de lo que ellos conocen y pueden abarcar hasta el momento: más incógnitas, mejores métodos de resolción… El avance en sus estudios les permitirá llegar a esos conocimientos.

Los primeros algebristas del Renacimiento

Es un texto histórico sobre el álgebra y la resolución de ecuaciones en el Renacimiento, mencionando a *Scipione del Ferro*, *Tartaglia* y *Cardano* como sus principales protagonistas. Se recomienda como lectura para los estudiantes. Con ella se les puede hacer reflexionar sobre varias cuestiones:

– No en todas las épocas históricas el desarrollo de las ciencias y de las artes ha sido el mismo: el entorno político y social ejercen una enorme influencia en este aspecto (se puede hacer notar el contraste entre la Edad Media y el Renacimiento).

– La aportación tanto de los árabes como la de los hindúes en las ciencias matemáticas (no solo en Europa se producían progresos).

– La forma, tan distinta a la actual, en la que trabajaban los matemáticos de la época: “los descubrimientos se guardaban celosamente, y solo se comunicaban a los muy allegados”.

– La enorme cantidad de tiempo que ha sido necesario (a veces, siglos) para llegar a resolver problemas que, en la actualidad, nos parecen sencillos.

Algunos problemas curiosos

Se proponen cuatro problemas curiosos para plantear como juegos en clase. En los tres primeros, las ecuaciones con las que se trabaja son de primer grado y, en el cuarto, la ecuación obtenida es de segundo grado.

Como una actividad más, se puede proponer a las alumnas y a los alumnos que inventen algunos juegos similares a los dos primeros.

Villamayor en fiestas

Se propone un problema en el que los estudiantes tienen que ir razonando cada uno de los resultados que se les dan y, finalmente, resolver una ecuación de segundo grado, decidiendo cuál es la solución válida.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MOTIVACIÓN

Multitud de fenómenos naturales y sociales se comportan linealmente, es decir, una causa doblemente intensa produce un efecto doblemente intenso, una misma causa que actúa por un espacio de tiempo dos veces más largo produce un efecto dos veces mayor. Y aún cuando muchos fenómenos se comportan así tan solo aproximadamente, se tratan como si fueran lineales para facilitar su estudio inicial. Un muelle se alarga al colgarle un peso y su alargamiento es doble cuando se cuelga un peso doble. Un coche a una velocidad de 60 km/h recorre 1 km en un minuto y, naturalmente, 2 km en 2 minutos. Si el precio del kilo de azúcar es de 0,90 €, es claro que, a menos que haya una oferta especial, por 2 kilos tendré que pagar 1,80 €.

Esto explica que la matemática de las aplicaciones a los fenómenos naturales y sociales sea fundamentalmente *lineal* en un primer acercamiento a los fenómenos y que los sistemas de ecuaciones lineales, en particular, constituyan el esqueleto básico de estas aplicaciones. De hecho, se dice que la mayor parte del tiempo que los ordenadores actuales dedican a resolver problemas matemáticos que tienen que ver con la industria y el comercio, se emplea en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales.

De aquí se deriva el enorme interés por conseguir métodos rápidos, eficaces y económicos que simplifiquen al máximo las tareas del ordenador. Teniendo en cuenta que este tiene que trabajar, por ejemplo, en la optimización del aprovechamiento de las rutas de una gran compañía aérea o telefónica, con sistemas de ecuaciones lineales de más de 800 000 variables, es fácil comprender que cualquier simplificación en el tratamiento de tales sistemas, por trivial que parezca, puede representar un ahorro de miles de horas de ordenador.

LOS PRIMEROS ALGEBRISTAS DEL RENACIMIENTO

Las matemáticas, al igual que, en general las ciencias y las artes, estuvieron aletargadas en Europa durante muchos siglos. Por medio de los árabes llegaron a occidente los progresos que los indios y los propios árabes hicieron en aritmética y álgebra.

El despertar de las matemáticas en Europa se dio en Italia en la primera mitad del siglo XVI, y sus protagonistas fueron *Scipione del Ferro*, *Tartaglia* y *Cardano*.

Scipione descubrió una solución para la ecuación $x^3 + ax = b$, un problema que había desconcertado a los griegos. Por aquella época, los descubrimientos matemáticos se guardaban celosamente y solo se comunicaban a los muy allegados. Eso hizo Scipione con su descubrimiento.

Tartaglia era el apodo de un matemático que, de pequeño, como consecuencia de un golpe en la cabeza, quedó tartamudo. De familia muy humilde, su genio y fuerza de voluntad le llevaron a ser un gran matemático. Resolvió otra importante ecuación de tercer grado:

$$x^3 + ax^2 = b$$

Cuando se enteró de que Scipione había resuelto la otra, se esforzó en hacerlo él también y lo consiguió. Al igual que Scipione guardó en secreto sus descubrimientos.

Cardano fue un hombre *genial y tramposo*. Matemático, médico, astrólogo, filósofo y jugador.

Cuando se enteró de que Tartaglia había resuelto esas ecuaciones, le rogó muy insistentemente que le contara cómo. Este se lo dijo, bajo promesa de que guardaría el secreto y, sin embargo, lo publicó como cosa suya.

A pesar de ello, aportó muchos descubrimientos propios y fue capaz de generalizar el descubrimiento de Tartaglia: era un pícaro capaz de sacar partido de sus robos.

Fue de los primeros en intuir la necesidad de los números imaginarios para obtener todas las soluciones de una ecuación. (El conjunto de los números imaginarios lo estudiarás en cursos posteriores).

En esa misma época, en Alemania, *Copérnico* revolucionó la astronomía, al defender el sistema heliocéntrico, según el cual, todos los planetas, incluida la Tierra, giran alrededor del Sol. Medio siglo más tarde, *Galileo* y *Kepler* daban nuevos empujes a la dinámica y a la astronomía: era el renacer del genio europeo.

ALGUNOS PROBLEMAS CURIOSOS

Te proponemos cuatro problemas curiosos. Tú mismo/a puedes inventar otros parecidos y proponérselos a tus compañeros/as:

1 Mi amiga Alicia me dijo:

– *Piensa un número*

– *Añádele 15.*

– *Multiplica por el 3 el resultado.*

– *A lo que salga réstale 9.*

– *Divide entre 3.*

– *Resta 8.*

– *Dime lo que sale.*

Yo le dije:

– *32.*

Y Alicia me dijo instantáneamente:

– *El número que pensaste fue el 28.*

¿Cómo consiguió Alicia averiguarlo tan deprisa?

Solución del problema

Vamos a traducir al lenguaje algebraico todas las operaciones:

Escoge un número $\longrightarrow$ x

Añádele 15 $\longrightarrow$ $x + 15$

Multiplica por 3 $\longrightarrow$ $3\,(x + 15) = 3x + 45$

Resta 9 $\longrightarrow$ $3x + 45 - 9 = 3x + 36$

Divide por 3 $\longrightarrow$ $\dfrac{3x + 36}{3} = x + 12$

Resta 8 $\longrightarrow$ $x + 12 - 8 = x + 4$

¿Qué resultado obtienes? $\longrightarrow$ $x + 4 = 32 \longrightarrow$ El 32

Si $x + 4 = 32$ entonces $x = 32 - 4$.

El número es el 28.

Observa que el arte de Alicia consistía en restarle 4 al número que yo le dijera. ¡Así cualquiera!

2 Después, mi amigo Alberto me propuso este otro:

Piensa un número... Súmale 20... Réstale 12... Réstale el número que pensaste. ¡Has obtenido 8! ¿Cómo pudo averiguarlo?

Comprueba que, sea cual fuere el número pensado, siempre se obtiene 8.

3 Más tarde vino Eva diciendo:

– *Escoge una carta de la baraja. El As cuenta como 1, el Rey como 10, el Caballo como 9, la Sota como 8 y las demás cartas como su número indica. Dobla el valor de tu carta. Al número que te resulta le añades 1. Multiplica el resultado por 5. Si tu carta es de oros, añade 4, si es de copas, añade 3, si es de espadas, añade 2 y si es de bastos 1. Dime el resultado.*

Yo le dije 39, y Eva me dijo instantáneamente:

– *Tu carta es el 3 de oros.*

¡Maravilloso!

¿Cómo lo hace?

4 Y, por último, Pepe cuenta mal sus diagonales.

Pepe ha pintado un polígono regular de muchos lados y ha contado las diagonales. Me dice:

– *Tiene 29, pero me parece que he contado alguna de menos.*

¿En cuánto se ha equivocado Pepe?

Solución

Observa que, si x es el número de vértices, de cada uno salen $x - 3$ diagonales. Al contarlas así, cuenta dos veces cada diagonal. Por tanto, el número de diagonales es:

$$\frac{x(x-3)}{2}$$

¿Podrá ser $\dfrac{x(x-3)}{2} = 29$ siendo x un número natural?

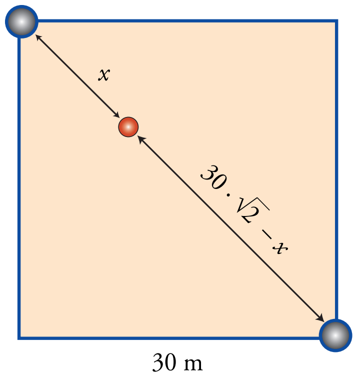
Si resuelves la ecuación, ves claramente que no. Pepe se ha equivocado. Si se ha equivocado al contar contando alguna menos, ¿en cuánto se ha equivocado? Dando valores adecuados a x encuentras que para $x = 10$ salen 35 diagonales. Se ha equivocado nada menos que en 6.

VILLAMAYOR EN FIESTAS

La plaza de Villamayor es cuadrada y tiene 30 metros de lado. Se ha colocado en una esquina, a 10 metros de altura, un altavoz, y en la esquina opuesta, a la misma altura, otro de doble potencia.

¿En qué punto de la diagonal te deberás colocar para oír los dos altavoces con la misma intensidad? Has de saber que la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente de sonido y directamente proporcional a la potencia.

Observa:



Si te colocas en el punto que hemos señalado, la distancia al altavoz de potencia menor será $\sqrt{100 + x^2}$ y la distancia al otro será, aplicando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{100 + (30 \cdot \sqrt{2} - x)^2}$.

La intensidad del sonido que procede del primero será, entonces, $\dfrac{k}{100 + x^2}$, siendo k la constante de proporcionalidad que depende de la temperatura del aire.

La intensidad del sonido procedente del segundo altavoz será

$$\frac{2k}{100 + (30 \cdot \sqrt{2} - x)^2}$$

Si el punto x es el que nos piden, se tendrá:

$$\frac{k}{100 + x^2} = \frac{2k}{100 + (30 \cdot \sqrt{2} - x)^2}$$

Resolviendo (hazlo), resultan dos soluciones, $x_1 = 16{,}73$ y $x_2 = -101{,}59$.

¿Cuál te sirve?