Historia de la geometría

La primera parte ya es conocida del curso anterior. Destacamos como especialmente adecuado para este tema el apartado "La geometría se funde con el álgebra", (junto con la biografía de Descartes). Los siguientes apartados quedan por encima de este curso y solo interesarán a los alumnos si el profesor lo complementa con explicaciones adicionales.

Descartes, filósofo y matemático. Jakob Steiner

Dos biografías de matemáticos, la primera de ellas muy adecuada al tema que se trata.

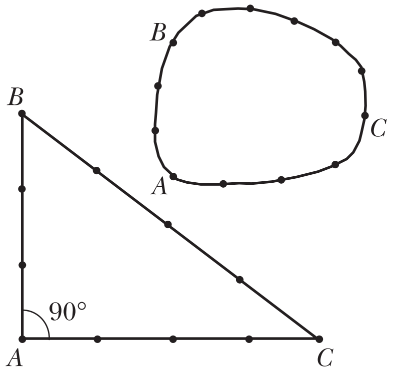
Geoplanos. Pentaminós y hexaminós

Dos actividades complementarias de fuerte contenido geométrico pero absolutamente ajenas a la geometría analítica.

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

La geometría nació en Egipto, motivada, como una gran parte de las matemáticas, por necesidades prácticas. En la estación de las crecidas, el Nilo se desbordaba y borraba las lindes entre las tierras cultivables. Tras cada inundación nadie sabía exactamente hasta dónde llegaban sus posesiones. Fue necesario inventar un arte para medir la tierra y eso fue inicialmente la geometría (geo=tierra y metría=medida).

El saber práctico de los egipcios les llevó bastante lejos. Sabían, por ejemplo, que un triángulo de lados de 3, 4 y 5 unidades de longitud es rectángulo. Los ángulos rectos de las bases de las pirámides están trazados probablemente con una cuerda, como la de la figura, tensada en los puntos señalados.



Los egipcios también sabían medir ángulos aproximadamente, así como calcular el volumen de ciertos cuerpos sólidos, lo que también les fue muy útil para la construcción de sus pirámides.

Ya en el siglo VI a. de C. *Tales de Mileto*, uno de los llamados Siete Sabios de Grecia, gran viajero, aprendió y llevó a Grecia el saber geométrico de los egipcios y comenzó a buscar las razones profundas de lo que entre los egipcios eran recetas de cálculo. Con ello comenzó la matemática tal como hoy la entendemos; esto es, como un sistema de pensamiento en el que unas verdades se van deduciendo lógicamente de otras.

La geometría adquirió una gran perfección entre los griegos, especialmente con *Euclides, Arquímedes* y *Apolonio*, que vivieron en el siglo III a. de C.

La geometría de los griegos estaba fuertemente influida por consideraciones filosóficas y estéticas. La circunferencia en el plano y la esfera en el espacio eran las figuras que colmaban todas las apetencias de simetría de un sentido artístico. Eran las que regían el movimiento de los astros divinos y en ellas se encontraba el símbolo de la perfección.

Por estas razones, la geometría griega fue, fundamentalmente, una geometría de las construcciones con regla y compás. Y con regla y compás llegaron a tal profundidad en el estudio de las cónicas que no fueron sobrepasados hasta el siglo XVII.

El saber geométrico se complementó con el cálculo de ángulos en la trigonometría, al servicio de la astronomía. Más tarde, en el siglo XVII, se fundió con el álgebra para dar lugar a la geometría analítica. Con el apoyo del cálculo infinitesimal, creado por *Newton* y *Leibniz*, también en el siglo XVII, la geometría se convirtió en la herramienta indispensable para el estudio de la mecánica, óptica y otras partes de la física.

En el siglo XIX aparecieron otras formas de geometría, distintas de la concebida por los griegos, que abrieron el camino a una revolución profunda de la física. A comienzos del siglo XX, *Einstein* se apoyó muy fundamentalmente en los avances de la geometría para crear su teoría de la relatividad.

Un geómetra

Euclides escribió su obra principal, los *Elementos*, en el siglo III a. de C. y desde entonces hasta el siglo XIX, es decir, 22 siglos, su obra fue un libro de texto fundamental en los centros de estudio de Europa. En número de ediciones, esta obra, según se dice, sólo es superado por la Biblia.

¿Cuál es el secreto de su éxito? Los *Elementos* de Euclides constituyeron por mucho tiempo el modelo más perfecto de fundamentación racional de la ciencia. En este modelo, se parte de *axiomas* y *postulados* (afirmaciones que se admiten por su evidencia o por acuerdo previo), y, a partir de ellas, se deducen, de acuerdo con las reglas de la lógica, los *teoremas*, es decir, las diferentes afirmaciones que constituyen la teoría.

La geometría se funde con el álgebra

El desarrollo del álgebra y la maduración de su cálculo simbólico durante los siglos XV y XVI, colocó a *Descartes* y *Fermat*, en el siglo XVII, en una posición ventajosa que supieron aprovechar para traducir los problemas clásicos de la geometría griega al lenguaje algebraico, creando la *geometría analítica*. Se abrió así un nuevo mundo de posibilidades y problemas, tanto para la geometría como para el álgebra. Esta interacción estimuló fuertemente, además, el desarrollo del análisis infinitesimal.

Esta conjunción de campos y de personas (Fermat, Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Huygens, los Bernoulli...), hace del siglo XVII el siglo privilegiado en la evolución del pensamiento matemático.

Geometría proyectiva

Pero la geometría no se estancó en la geometría analítica. En el mismo siglo XVII, con *Descartes* y *Pascal*, se fue gestando un nuevo tipo de geometría que dejaría a un lado los problemas en que la medida de distancias y ángulos juegan un papel principal, para ocuparse de aquéllos, por ejemplo, en que las propiedades de las figuras planas que se estudian, son las que se conservan al proyectar desde un punto exterior al plano y luego cortar por otro plano del espacio.

Ésta fue la *geometría proyectiva*, que alcanzó su cumbre con Poncelet, Steiner, Staudt..., en el siglo XIX.

Las geometrías no euclídeas

La fecundidad de la geometría para proponer nuevos retos al pensamiento humano es inagotable. Si tenemos en cuenta lo profundamente ligado que está nuestro modo de pensar a nuestra imaginación espacial, no es muy sorprendente que así sea.

En la primera mitad del siglo XIX se comenzó a ver la luz en un profundo problema geométrico de más de veintitrés siglos. Entre los postulados propuestos por Euclides, para levantar sobre ellos el edificio lógico de la geometría, figuraba uno, el quinto, que al contrario que los demás no parecía nada obvio: "*Si una recta que corta a otras dos forma ángulos interiores con ellas (a un mismo lado de la recta) que suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si se prolongan indefinidament, llegan a encontrarse del lado en que los ángulos suman menos que dos rectos*".

Por siglos y siglos los matemáticos se habían preguntado si la geometría no se podría levantar sin necesidad de admitir, por convicción, una afirmación tan complicada.

Hubo innumerables intentos de hacerlo así. El pensamiento colectivo de los matemáticos llegó a estar lo suficientemente maduro en la primera mitad del siglo XIX y, para entonces, casi al tiempo, e independientemente, Gauss en Alemania, Bolyai en Hungría y Lobachevski en Rusia, dieron con la solución: "*Se pueden construir geometrías distintas basadas en la negación del quinto postulado de Euclides*".

Habían nacido las *geometrías no euclídeas* que, aparte de provocar una revolución dentro del mundo matemático, causaron con el tiempo una profuda transformación en el pensamiento filosófico sobre la teoría del conocimiento humano.

Geometrías más modernas

El desarrollo más reciente de la geometría ha seguido diferentes cauces.

A finales del siglo pasado fueron desarrollándose nuevas formas de evolución de la geometría analítica clásica, dando lugar a la *geometría algebraica*, que en la actualidad presenta implicaciones muy importantes en teoría de números.

La *geometría diferencial* es otra de las evoluciones de la fusión del análisis con la geometría.

La *topología* es una forma de geometría que, inicialmente, se ocupaba de las propiedades de las figuras que se mantienen por transformaciones que conservan la cercanía entre los puntos, es decir, por las transformaciones que deforman las figuras sin llegar a romperlas, como si fueran de plastilina.

DESCARTES, FILÓSOFO Y MATEMÁTICO. JAKOB STEINER

Descartes, filósofo y matemático

Es muy interesante observar lo cerca que han estado el filósofo y el matemático a lo largo de la historia del pensamiento. Pitágoras es el padre de la filosofía occidental y al mismo tiempo el gran impulsor de la matemática en la Grecia antigua. Platón tenía en tanta estima la matemática que a la entrada de su Academia, tenía escrito: *Nadie entre sin saber geometría.* Los ejemplos se podrían multiplicar, pero, ¿cómo se explica este fenómeno?

La matemática es un mundo hecho por nuestro pensamiento a su propia medida y, en él, se mueve a sus anchas acercándose, como en ningún otro campo, a la certeza.

El pensamiento matemático es así modelo de pensamiento sobrio, eficaz, potente y bello, con el que somos capaces de explorar el mundo a nuestro alrededor. Así lo entendió también Descartes, que fraguó su filosofía tomando como ejemplo el modo de proceder de los matemáticos en la construcción de su ciencia.

René Descartes nació en Turena, Francia, en 1596, de familia bien acomodada. Fue un muchacho inteligente a quien, a los 8 años, envió su padre al colegio de La Flèche, recién abierto por los jesuitas. Era, como Descartes afirmó más tarde, *una de las escuelas más famosas de Europa.*

Allí durante 10 años, fue formado en humanidades, filosofía y ciencia. Como durante estos años, su salud fue delicada, le estaba permitido quedarse en la cama hasta muy tarde mientras que sus compañeros estaban en clase. Descartes aprovechaba este tiempo para meditar profundamente, rumiando lo que iba aprendiendo y considerando lo insatisfactorio de la filosofia que le presentaban y lo sólido por el contrario, de aquellas construcciones matemáticas.

Más adelante viajó mucho, estudiando, como él decía, *en el libro del mundo*, como militar y como simple viajero.

En 1637 publicó su obra más importante, *El Discurso sobre el Método*, en el que trata de dar reglas para conseguir acercarse a la verdad en todos los campos. Como un ejemplo de su utilización aparece junto con él su *Geometría*, en la que, mediante el uso de coordenadas, resuelve un gran número de problemas de la antigüedad por procedimientos muy originales que, luego, dieron lugar a nuestra geometría analítica.

Antes de escribir su famoso *Discurso del Método* en 1637 y como un ensayo previo que nunca se llegó a publicar durante su vida, Descartes escribió las *Reglas para la dirección del ingenio*, que vienen a constituir una breve guía para pensar bien.

Aquí tienes, entresacadas, algunas de las reglas más interesantes:

Regla III. Acerca de los objetos propuestos se ha de buscar, no sólo lo que otros hayan pensado o lo que nosotros mismos conjeturemos, sino lo que podamos intuir clara y evidentemente o deducir con certeza; pues la ciencia no se adquiere de otra manera.

Regla V. Todo el método consiste en el orden y disposición de aquellas cosas a las que se ha de dirigir la mirada de la mente, a fin de que decubramos alguna verdad. Y la observaremos exactamente si reducimos gradualmente las proposiciones más complicadas y oscuras a otras más simples y, después, intentamos ascender por los mismos grados, desde la intuición de las más simples hasta el conocimiento de todas las demás.

Regla VII. Si en la serie de las cosas que se han de investigar se presenta algo que nuestro entendimiento no puede intuir suficientemente bien, allí es preciso detenerse; y no se debe examinar las demás cosas que siguen, sino abstenerse de un trabajo superfluo.

Regla IX. Conviene dirigir toda la agudeza del espíritu a las cosas más insignificantes y fáciles, y detenerse en ellas largo tiempo hasta acostumbrarnos a intuir distinta y claramente la verdad.

Regla X. Para que el espíritu se vuelva sagaz debe ejercitarse en buscar las mismas cosas que ya han sido descubiertas por otros, y en recorrer con método incluso los más insignificantes artificios de los hombres, pero sobre todo aquellos que explican el orden o lo suponen.

Regla XI. Después de haber intuido algunas proposiciones simples, si de ellas concluimos alguna otra cosa, es útil recorrerlas con un movimiento continuo e interrumpido del pensamiento, reflexionar en sus mutuas relaciones y concebir distintamente, cuanto sea posible, varias cosas a la vez, pues así nuestro conocimiento se hace mucho más cierto y, sobre todo, se desrrolla la capacidad del espíritu. (R. Descartes, *Reglas para la dirección del espíritu*, Alianza Editorial. Madrid 1984; traducción de Juan Manuel Navarro Cordón).

Jakob Steiner (1796-1863)

El gran geómetra del siglo XIX fue *Jacob Steiner*, el *Apolonio* de los tiempos modernos.

Steiner es un formidable ejemplo para aquéllos que se introducen en el mundo de la ciencia con cierto retraso. Fue analfabeto hasta los 14 años, ya que era el quinto de los hermanos de una familia de campesinos suizos y estuvo demasiado atareado en su niñez con las labores del campo.

A los 18 años, su deseo de aprender fue más fuerte que la voluntad de sus padres y se fue por cuenta propia a una famosa escuela, Yverdon, del gran pedagogo suizo Pestalozzi. Éste le recibió cordialmente y le admitió gratuitamente en su centro.

Su vida académica no fue nada fácil; estuvo, primeramente, en Heidelberg y, más tarde, en Berlín, donde permaneció hasta sus 30 años dando clases particulares.

Hasta los 33 años no tuvo un puesto como profesor permanente en la Escuela de Arte y Oficios de Berlín, donde tuvo graves problemas con el director, que quiso echarle de allí.

Pero en 1832 había conseguido acabar una obra de geometría extraordinariamente importante que le abrió todas las puertas del mundo académico. Ese mismo año fue nombrado *Doctor Honoris Causa* por la Universidad de Berlín; en 1833, el Rey de Prusia le nombra Profesor Real y, en 1834, se le admite como miembro de la Academia de Ciencias de Berlín. Todo el resto de su vida, hasta 1863, fue una sucesión ininterrumpida de profundos descubrimientos en geometría, a la que dedicó toda su energía.

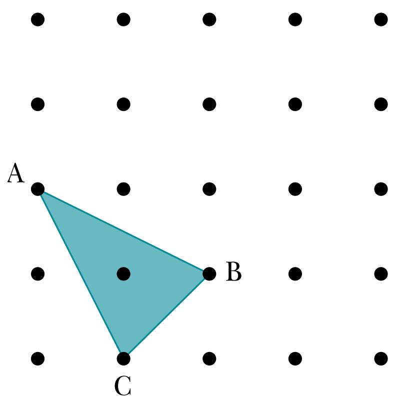
GEOPLANOS. PENTAMINÓS Y HEXAMINÓS

Geoplanos

El geoplano fue ideado por el profesor C. Gattegno y es un material que se utiliza para estudiar la geometría del plano. Es un tablero con una malla de clavos, de uno de los tipos que aparecen en las figuras. En él se pueden formar segmentos utilizando gomas elásticas.

Si no dispones de un geoplano, puedes utilizar tramas de puntos.

Tramas cuadradas



a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en esta trama cuadrada de 5 × 5 puntos?

b) Podrías dibujar un triángulo equilátero uniendo tres puntos de la trama? Averígualo tanteando.

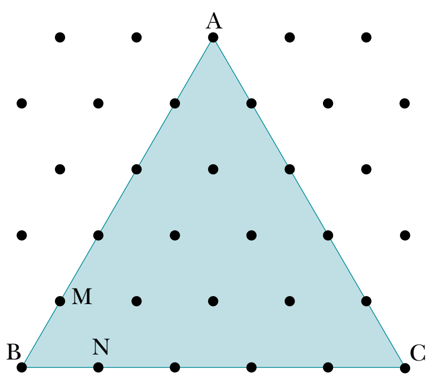
c) Tomando como unidad de superficie el cuadrado mínimo de la trama, se ha calculado el área del triángulo *ABC* así:

$$S_T = 2 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} =$$

$$= 4 - 1 - 1 - 0{,}5 = 1{,}5u^2$$

Explica el proceso seguido.

Tramas triangulares



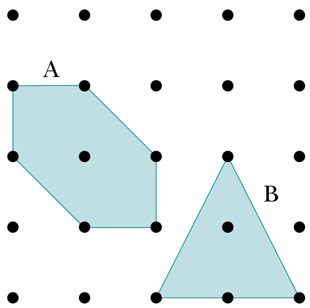
a) ¿Qué polígonos regulares se pueden dibujar en la trama triangular? Dibújalos.

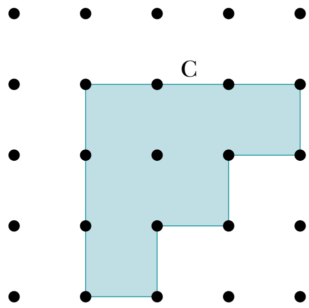
b) ¿Cuántos triángulos equiláteros, que tengan sus vértices en los puntos de la trama, hay dentro del triángulo *ABC*?

c) El lado del triángulo *ABC* es cinco veces el de *BMN*.

¿Cuál es la relación entre las áreas de dichos triángulos?

Áreas de figuras sobre un tablero





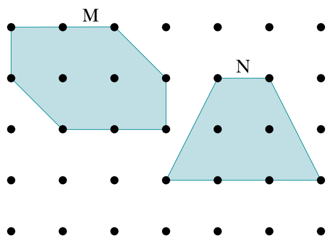
Las tres figuras marcadas contienen, cada una, un punto de la cuadrícula en su interior.

a) Dibuja figuras que tengan un solo punto en su interior y dales un nombre (D, E, F…).

b) Calcula el área de cada una de esas figuras, cuenta los puntos del borde y completa la tabla:

Trata de encontrar una ley o fórmula que relacione el área *S*, con el número de puntos que hay en el borde, *b*.

		A	B	C	D	E	…
1 PUNTO INTERIOR	PUNTOS EN EL BORDE (*b*)	6	4	12			…
	ÁREA (*S*)	3	2	6			…

c) 

Repite el proceso para figuras con dos puntos en el interior y busca la nueva relación entre *S* y *b*.

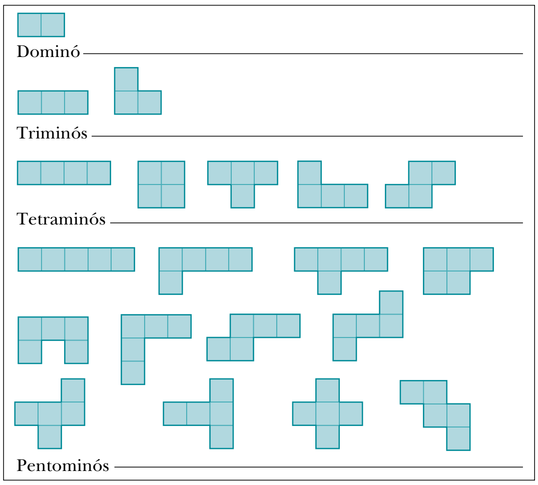
		M	N	…
2 PUNTOS INTERIORES	PUNTOS EN EL BORDE (*b*)	8	6	…
	ÁREA (*S*)	5	4	…

d) Construye figuras con tres puntos interiores y encuentra la relación entre el área y el número de puntos en el perímetro exterior.

e) Utiliza todas tus exploraciones para tratar de descubrir un teorema (el teorema de Pick) relativo a las figuras con vértices en una trama, estableciendo una relación entre el área, *S*, los puntos del borde *b*, y los del interior, *i*.

Pentominós y hexaminós

La idea de los pentominós surgió allá por 1954, desarrollada por el matemático norteamericano Salomon W. Golomb.



Dos cuadrados unidos por un lado forman un **dominó**.

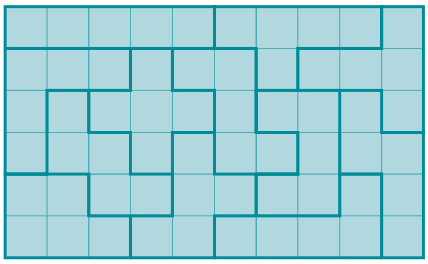
Con tres cuadrados podemos formar dos figuras en las que cada cuadrado queda unido, al menos, a otro, por un lado. Se llaman **triminós**.

Si disponemos de 4 cuadrados podemos formar **tetraminós**.

…Y llegamos a los **pentominós**, 5 cuadrados unidos por un lado.

Como puedes observar en la figura, hay 12 posibilidades de unión de los 5 cuadrados; esto es, podemos tener 12 pentominós diferentes.

Pavimentos



Como ves en la figura de la derecha, los 12 pentominós pueden pavimentar un rectángulo de 10×6.

a) Podrían pavimentar un rectángulo de 3×20?

b) ¿Qué otros rectángulos pueden pavimentar? Di sus dimensiones y construye alguno de ellos.

c) ¿Se podría rellenar un cuadrado con los 12 pentominós?

(Recórtalos en cartulina para facilitar los ensayos.)

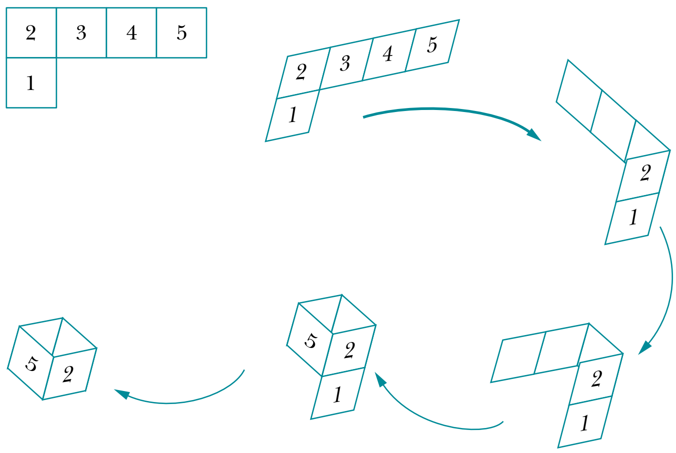
El juego de Golomb

Necesitas un tablero ($8 \times 8 = 64$ cuadros) y los 12 pentominós construidos con cuadros iguales a los del tablero. Cada jugador coge por turno una pieza y la coloca en el tablero. El juego acaba cuando no queda espacio para colocar ninguna de las piezas que quedan. Gana el que coloca la última.

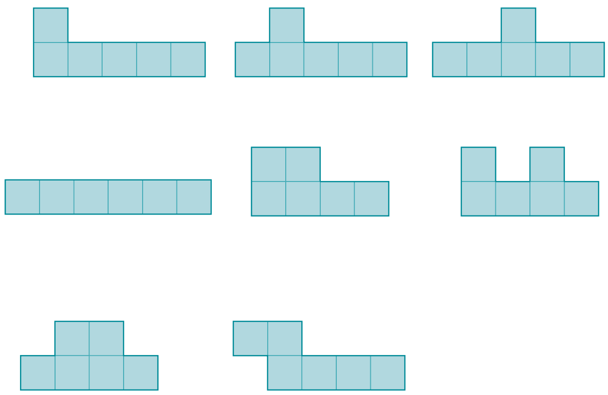
Del pentominó al cubo

Doblando algunos pentominós puede construirse una caja cúbica sin tapa.

Encuentra cuáles de ellos sirven para esta operación.



Los hexaminós



Con la misma idea que apuntábamos, seis cuadrados unidos por un lado, como los que aparecen en la figura, formarán **hexaminós**.

Hay 35 hexaminós distintos.

Intenta descubrirlos representándolos en papel cuadriculado. Debes ponerles números para no confundir los más parecidos.

Los hexaminós y el cubo

Doblando convenientemente algunos hexaminós, puedes conseguir un cubo.

Busca algunos de ellos.

Intenta decidir previamente, sin plegarlos, cuáles son válidos.

A continuación, compruébalo recortando y doblando los que hayas elegido.